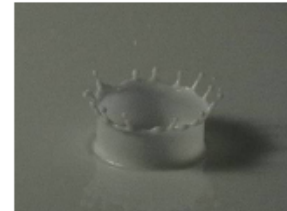


ミルククラウンに関する研究

郡司博史(京大理)・石井秀樹(東大新領域)・斉藤亜矢(京大医)・酒井敏(京大人環)

液滴を薄い流体層に衝突させると、王冠状の構造(ミルククラウン)を形成する。このような現象では、運動はほとんど表面張力によって支配され、時間スケールが非常に短い。そのため、この現象を連続的に記録するには、高速度カメラなどの高価な機材が必要となり、液滴の衝突速度などのパラメータを変えるような系統的な研究は、ほとんど行われてこなかった。そこで我々は、安価な民生用デジタルビデオカメラで記録する方法を考え、この方法で系統的な実験を行い、クラウンの直径及び高さに注目して、得られた画像の解析を行った。



クラウンの直径は、液滴が衝突してからの経過時間の1/4乗に比例していることがわかった。これまで提唱されてきたような、直径が経過時間の1/2乗に比例した領域は、クラウン崩壊後の痕跡のみにしか見られなかった。このことは、クラウンは崩壊しながら表面張力波に変わることを意味するものと考えられる。

クラウンの高さに注目すると、クラウンの高さが増加するのにかかる時間に比べ、減少するのにかかる時間の方が大きいことがわかった。この非対称性は、クラウン上部の流体の質量変化と表面張力を考慮した簡略化したモデルを考えることにより、十分再現することができた。

本文

1. [はじめに](#)
2. [実験方法](#)
3. [実験結果](#)
4. [解析](#)
5. [考察](#)
6. [まとめ](#)

付録

- A. [カウンターについて](#)
- B. [ピクセル数から大きさへの変換](#)
- C. [代表画について](#)
- D. [その他の特徴](#)
- E. [染色した液滴を衝突させる](#)
- F. [画像に行った処理](#)
- G. [使用した牛乳](#)
- H. [全画像・データ](#)
- I. [折れ曲がりが起こる時の画像](#)
- J. [引用文献](#)
- K. [著者連絡先](#)

2. 実験方法

2.2 実験装置

図3(上)は、本実験に使った実験装置の全体写真である。

スタンドに滴下部(写真下)を取り付け、ここから水滴を落下させる。ここには医療用点滴セットを使用し、管を通る流量を細かく調整し、大きさがほぼ均一の水滴が落下するようした。この液滴の直径はほぼ4mmである。滴下部の先端には、センサーを設置し、タイムカウンターとつなぎ、ここを通過してからの経過時間を計測した。本実験では、この経過時間から、液滴が下に動いた液体に衝突するまでの時間を計測して、衝突



1. はじめに

ミルククラウンは、非常に魅力的な現象で、液跳ねや表面張力波とあわせ、数多くの研究が行われてきた。これらの研究は、Worthington (1908) の液滴の跳ね返りに関する研究に遡り、これまでに様々な現象が明らかになっている。

この現象の撮影は容易ではなく、これまで様々な方法が取られてきた。Edgerton (1987) は、ストロボ写真の技術を用いて、ミルククラウンの映像をとらえた。この方法では、瞬間をとらえる事はできても、連続的な映像を得る事はできない。Yalin and Weiss (1995) は、CCDカメラでとらえた映像を、コンピューターを通して画像化した。

最近では、デジタル高速度カメラも市販されているので、そのようなカメラを使用すれば、系統的かつ定量的な実験も、比較的容易に行えると思われるが、高価で誰でも簡単に入手できるわけではない。

そのため、粘性、流体層の深さといったパラメータを変えるような、系統的な研究は少ない。しかも、これらは、GDIエンジンやインクジェットプリンタなど、工学的に応用するために、特殊なスケールを対象としているものが多く、伝統的に「ミルククラウン」と呼ばれてきた現象のスケールを対象とした研究は非常に少ない。

そこで我々は、安価な民生用デジタルビデオカメラを用いて、「伝統的な」スケールにおける、系統的な実験を試みた。さらに、得られた画像の座標値を読み取る事により解析を行い、結果を検証した。



図1 Milk Crown

2. 実験方法

2.1 撮影方法

撮影にはSony DCR-TRV900 (図2) を用いた。最近のデジタルビデオカメラは高速シャッターが切れるものが多く、このカメラも最高1/10000秒のシャッタースピードで撮影できるので、変化の激しいミルククラウンを止めることが可能である。

しかしながら、使用したデジタルビデオでは高画質モードであるプログレッシブモードを使うと、撮影間隔は66ミリ秒(通常モードでは33ミリ秒)であるのに対して、ミルククラウンの形成から崩壊にかかる時間は、およそ30ミリ秒であるので、ミルククラウンのめまぐるしい変化を連続的にとらえる事はできず、一つのミルククラウンの形成から崩壊までの間に一コマの画像を得ることしかできない。

そこで、クラウンの形成の再現性が良いことを利用し、録画しながら次々と液滴を落とし、クラウンを捕らえたコマを後で並べ替えて高速度カメラでとらえたような連続画像を得た。液滴を滴下させる時間間隔は、液滴の滴下前に、衝突する流体層の水面が静止するように調整した。並べ替えの際の時間の指標とするため、液滴の落下点付近にセンサーを設置し、液滴がここを通過してからの経過時間を、一連の画像の中に写し込んだ。



図2 Sony TRV900

2. 実験方法

2.1 撮影方法

撮影にはSony DCR-TRV900 (図2) を用いた。最近のデジタルビデオカメラは高速シャッターが切れるものが多く、このカメラも最高1/10000秒のシャッタースピードで撮影できるので、変化の激しいミルククラウンを止めることが可能である。

しかしながら、使用したデジタルビデオでは高画質モードであるプログレッシブモードを使うと、撮影間隔は66ミリ秒(通常モードでは33ミリ秒)であるのに対して、ミルククラウンの形成から崩壊にかかる時間は、およそ30ミリ秒であるので、ミルククラウンのめまぐるしい変化を連続的にとらえる事はできず、一つのミルククラウンの形成から崩壊までの間に一コマの画像を得ることしかできない。

そこで、クラウンの形成の再現性が良いことを利用し、録画しながら次々と液滴を落とし、クラウンを捕らえたコマを後で並べ替えて高速度カメラでとらえたような連続画像を得た。液滴を滴下させる時間間隔は、液滴の滴下前に、衝突する流体層の水面が静止するように調整した。並べ替えの際の時間の指標とするため、液滴の落下点付近にセンサーを設置し、液滴がここを通過してからの経過時間を、一連の画像の中に写し込んだ。









図2 Sony TRV900

3. 実験結果

3.3 液滴が衝突する流体層の深さを変える

標準実験の条件を基準に、液滴が衝突する流体層の深さだけを1mmから9mmまで変化させた時の結果を表2に示す。(代表画は、最もクラウンの高さが高くなった時のものである。)

表2 液滴が衝突する流体層の深さを変えた実験結果「詳細」のページに全画像リストを、代表画をクリックすると、別ウィンドウにアニメーションを表示する。

略称	D01(STD)	D02	D03	D05	D07	D09
代表画						
深さ	1mm	2mm	3mm	5mm	7mm	9mm
詳細	H040D01 TOP	H040D02 TOP	H040D03 TOP	H040D05 TOP	H040D07 TOP	H040D09 TOP

流体層の深さが3mm以下と5mm以上の場合で、クラウンの形状が大きく異なる。5mm以上では、いわゆるミルククラウンのイメージとはかなり異なる形状となる。この場合の、クラウンの直径・高さは、流体層の深さが3mm以下の場合に比べて明らかに小さい。

また、流体層の深さを3mm以上にした場合は、クラウン状の構造が消滅した後に形成される「こけし」の大きさが、2mm以下の場合に比べて非常に大きく、高くなっている。

どの条件でもクラウン上部には突起が形成されるが、深さが5mm以上の場合には、クラウンが消滅する前に突起が消滅してしまう。これは、突起がクラウン消滅後も残る3mm以下の場合と対照的である。

3.4 粘性を変える

標準実験の条件を基準に、異なる作業流体を用いて、異なる粘性に対する実験の結果を表3に示す。流体の種類を変えているため、表面張力も密度も異なるが、粘性の差が40倍あるのに対して、表面張力、密度は2倍以内と比較的差は小さい。

略称	V11	V17(STD)	V68	V44
代表画				
粘性	1.09 cSt	1.72 cSt	6.80 cSt	44.1 cSt
流体	食紅水溶液	牛乳	グリセリン水溶液	グリセリン水溶液
詳細	V11 TOP	V17 TOP	V68 TOP	V44 TOP

表3 粘性を変化させた実験結果

「詳細」のページに全画像リストを、代表画をクリックすると、別ウィンドウにアニメーションを表示する。

V11, V17(STD), V68では、これらの実験ではクラウンの形に大きな変化は見られない。

それに対して、粘性を極端に大きくしたV44では、円筒部の大きさも小さい。また、クラウンが崩壊する直前まで、クラウン上部の突起は形成されない。クラウン上部は外側に大きく反っている。(突起に関して、詳しくは付録D.3を参照。)

3.5 実験のまとめ

実験の結果、ミルククラウンの形成に関して次の特徴が見られた。

1. 衝突速度を変えた時

衝突速度を大きくすると、クラウンの高さは高く、直径も大きくなり、クラウンの厚さは薄くなる傾向がある。突起の数も少なくなる傾向が見られる。

衝突速度が速い時は、クラウン形成の初期段階で、クラウンの側面に筋状の凹凸が見られる。

2. 液滴が衝突する流体層の深さを変えた時

流体層の深さが3mm以下の場合、標準実験とほとんど変わらない。

5mm以上の場合、現れるクラウンの形状が大きく異なる。この場合に現れる、同心円状の構造の直径および高さは、深さが3mm以下の場合のクラウンに比べて明らかに小さい。突起はクラウンが消滅する前に消滅する。

深さが3mm以上の場合、クラウン消滅後に「こけし」が顕著に現れる。

3. 作業流体の粘性を変えた時

粘性を極端に大きくすると、クラウンが消滅する直前までは、クラウン上部の突起は形成されない。クラウン上部は外側に大きく反った形となる。この時のクラウンの直径・高さは、標準実験に比べて小さい。

大まかな特徴が得られたので、画像解析を行い、詳しく議論を行う。

4. 解析

4.1 解析方法

前節の実験で、ミルククラウンの画像を見る限り、その形状は条件によってかなり変化する事がわかる。液滴が落下してから最も整った形のクラウンになる時間も条件によって異なる。

そこで、クラウンが成長する過程を比較するために、クラウンの直径と高さに注目して、その変化を定量的に調べた。

クラウン直径は、クラウン下端で測った。具体的には、クラウンの左右の立ち上がりの点(図5(上)の点A・B)の間のピクセル数を測った。

クラウンの高さは、図5(上)の画像からもわかるように、上端にできる突起は個体差が大きいので、高さとしては含めずに、突起の付け根までを計測することにした。具体的には、Cから線分ABまでのピクセル数を計測した。

液滴を衝突させる流体層の深さを変えた実験では、クラウン崩壊後も、その痕跡が比較的はっきり追えるので、この直径についてもクラウン同様に計測を行った。クラウン崩壊後の痕跡では、図5(下)のように、大きな構造の外側に小さな波が出て行くのが見られるが、ここでは水平方向に最も大きな構造の左右の立ち上がりの点D・E間のピクセル数を計測した。

なお、計測したピクセル数から、実際の大きさへの変換を行った。この変換操作に関しては、付録Bに示す。

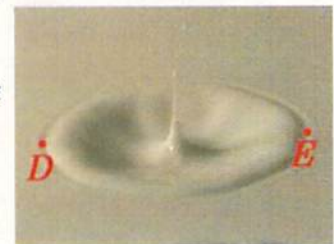
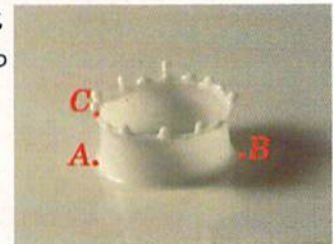


図5 計測に使用した点

4.2 クラウンの直径

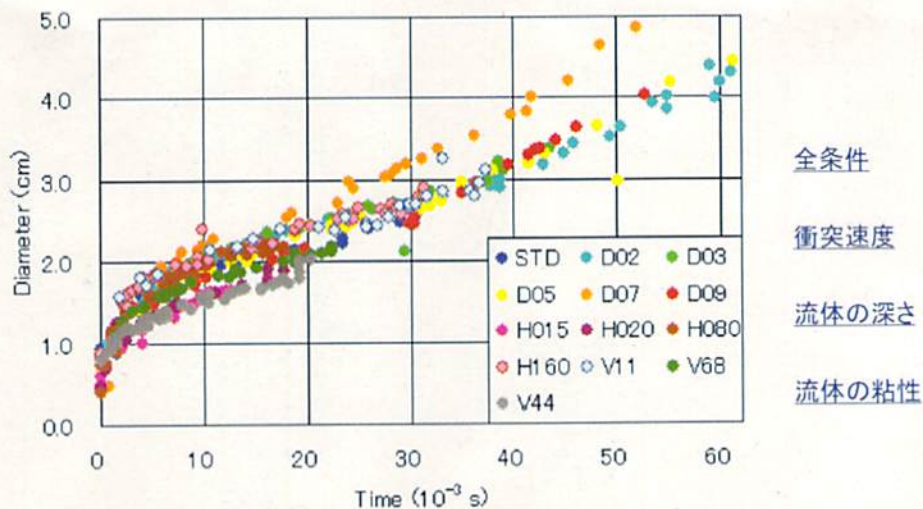


図6 クラウンの直径の時間変化 右の各条件をクリックすると、その条件のグラフになる

クラウンの直径と経過時間の対応を図6に示す。

これを見ると、クラウンが広がる速度は、どの条件でもほぼ同じであることがわかる。

10msから30msまでは、直径の変化速度は条件によらない一定の値(40cm/s)をとる。

クラウンの痕跡の直径も測ることのできたD02, D07, D09では、 $t=30\text{ms}$ 付近で、直径の変化速度が急激に変わる折れ曲がりが見られる。この折れ曲がりの時間は、クラウンが崩壊する時間に相当する。(画像を付録Iに示す。) 痕跡の変化速度は、流体の深さによらず一定の値(60cm/s)をとる。これは、10msから30msまでの変化速度に比べて**速い**。

4.3 表面張力波解

これまでは、ミルククラウンのような現象は、これまでは主として表面張力波として考えられてきた。Yalin and Weiss (1995) の様に、ミルククラウンの様な軸対称の構造を仮定し、浅水系で支配方程式を解けば、クラウンの半径 r_{cr} は、 α を定数として、

$$r_{cr} = \alpha(t - t_0)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

の形で表され、時間の1/2乗に比例することが知られている。 t_0 は、時間の原点のずれを表す定数である。この関係は、擾乱が鉛直方向に一定の速度で引き戻されると仮定すれば、質量保存の関係から求めることもできる (Fulana and Zaleski (1998))。

本実験の時間および直径の対数を取ったグラフを図7に示す。この図を見ると、クラウン崩壊前の $t < 30\text{ms}$ の領域では、どの条件でもグラフの傾きはおおよそ1/4であることがわかる。この傾きは、 t_0 を $-5\text{ms} < t_0 < 5\text{ms}$ で変化させてもほとんど変化しない。

また、クラウン崩壊後の傾きは、崩壊前と明らかに異なっていることがわかる。これについては、次ページで別途解析する。

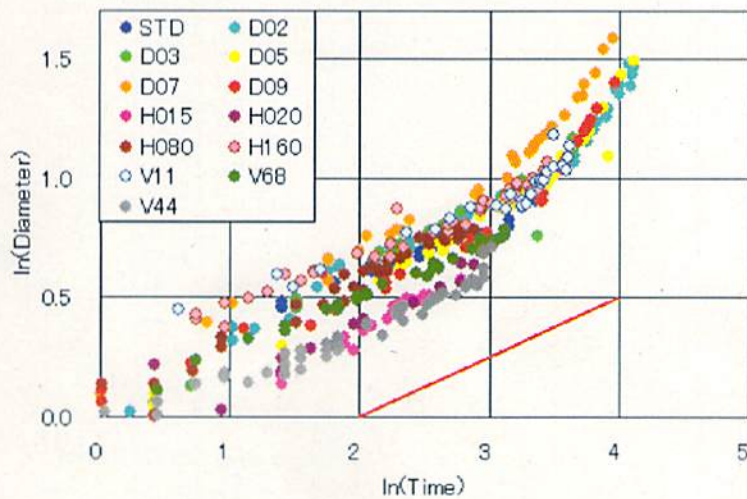


図7 クラウンの直径の時間変化(両対数グラフ) 赤実線は、傾きが1/4の直線を示す。

クラウン崩壊後の痕跡の変化には、崩壊前とは異なったメカニズムが働いていると考えられる。この領域では、 t_0 を適当に定めると、(1)式を満たす結果が得られる。D02, D05, D09のとき $t_0 = 15\text{ms}$ 、D07のとき $t_0 = 10\text{ms}$ とすれば、図8に示すように、傾きは1/2になる。

t_0 をこのように定めた時、 $t=0$ は、クラウンが崩壊し始める時刻に相当する。クラウンが崩壊していく過程で、擾乱は表面張力波になるのではないかと推測される。

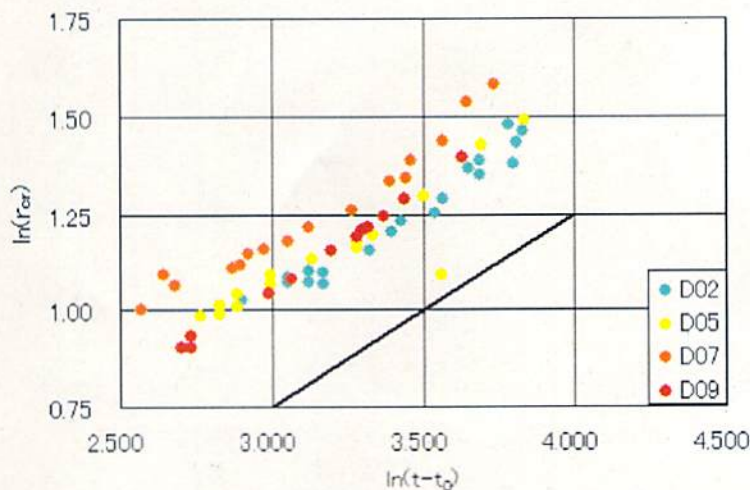


図8 クラウンの直径の時間変化(両対数グラフ) 黒実線は、傾きが1/2の直線を示す。

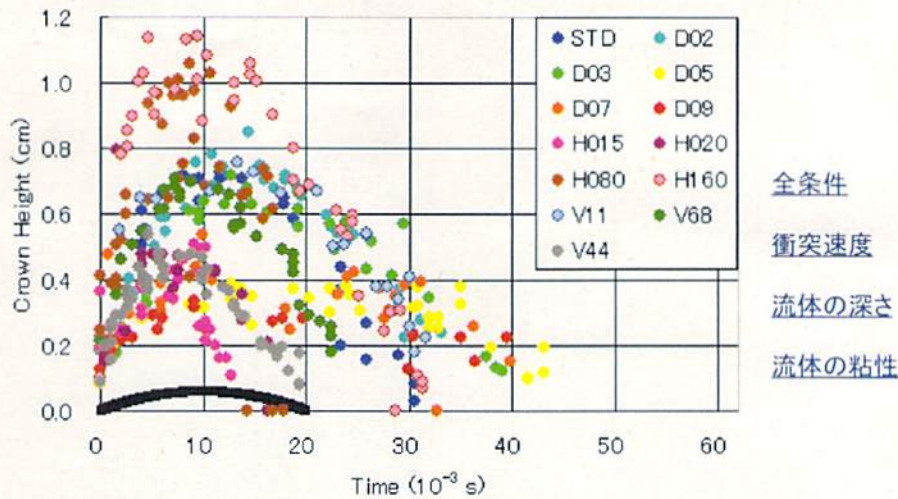


図9 クラウンの高さの時間変化 (リンクをクリックすると、対応するグラフを表示する)

クラウンの高さと時間の対応を図9に示す。どの条件でも、液滴の衝突からおよそ10msで高さの最大値を取り、20-30ms程度でクラウンは消滅している。クラウンの高さが増加する時間に比べ、減少する時間は長く、両者の間に対称性は見られない。

図9の黒線は、重力加速度で鉛直投げ上げを行った場合のプロファイルである。クラウンの鉛直加速度は、重力加速度に比べてはるかに大きいことがわかる。標準実験で鉛直加速度を見積もると、は、クラウンの高さが増加している時で重力加速度のおよそ16倍、減少しているときで4倍である。

5. 考察

5.1 鉛直方向の運動方程式

解析では、クラウンの高さの変化から見積もられる鉛直方向の加速度は、上昇時と下降時で大きく異なっていることがわかった。このことを簡略化したモデルを用いて検証する。

図10のように、クラウンの上端が、半径 r の円柱が環状に曲がったような構造(この部分を、以降リングと呼ぶ)をしているとし、流体にかかる力は重力と表面張力だけであると

する。表面張力を s 、重力加速度を g 、流体の密度を ρ 、壁の上端(リングの下端)での流速を v_T 、リングの(中心の)高さを h とする。表面張力は、クラウンの内・外側の2面にかかるので、運動方程式は次のように表すことができる。

$$\rho\pi r^2 \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = -2s - \rho\pi r^2 g + \rho\pi v_T \frac{\partial r^2}{\partial t} \quad (2)$$

右辺の3項目は、壁から流入する運動量をあらわす。

この式の妥当性を、画像解析による値で簡単に検証してみる。

標準実験では d^2h/dt^2 の値は、クラウンの高さが最大になる時でおよそ -100 m/s^2 である。そこで、クラウンの高さが最大となる時の加速度を -100 m/s^2 と仮定し、牛乳の表面張力を 50 dyn/cm 、密度を 1 g/cm^3 とすれば、(2)式から求められるリングの半径は、 $r = 0.6 \text{ mm}$ となる。

画像からリングの半径を見積もることにする。画像からは断面を見る事はできないが、画像に写ったクラウンの左右の端にある突起の付け根の太さは、リングの直径にほぼ等しいと考えられる。標準実験で高さが最大となったD01C00でこの部分の大きさを測ると、およそ 0.8 mm であり、上の見積もりとほぼ一致した。

そこで、クラウン上端の流体に対して(2)式が成り立つとして、以下の議論を進めることにする。

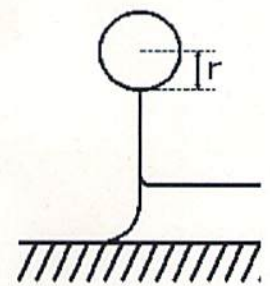


図10 考えたモデルの断面図

5. 考察

5.2 上昇速度を仮定する

図10のモデルからクラウンの高さを計算するには、クラウンの上端にある流体の半径 r を求めることが必要である。

図11に、クラウンの鉛直断面の概念図を示す。(図10では考えなかった、クラウンの壁の厚みに注目する。)壁の鉛直断面の厚さが、高さによらず一定であると仮定する。このとき、壁内の流体には、表面張力と重力のみが働いている。表面張力は上下で釣り合うから、壁内の流体にかかる力は、重力だけであると考えてよい。

実験で得られた画像では、クラウンの内側で、ガラス面が見えているものがあることから考えると、クラウンの内側にあった流体は、クラウンによって完全に押し退けられていると考えられる。押し退けられた流体は、落下した液滴とともにクラウンの壁及びリングを形成していると考えられる。このとき、クラウンの付け根での流体の収支は、

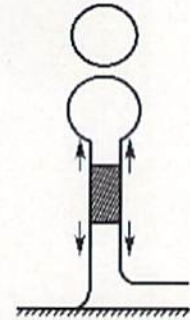


図11 壁では表面張力の鉛直成分が釣り合う

$$\delta \cdot v = d \cdot \dot{r}_{cr} \quad (3)$$

と表される。但し d は流体の深さ、 δ は壁の厚さ、 r_{cr} はクラウンの半径、 v は付け根から流体が上昇する速度である。 \dot{r}_{cr} の値は、1m/sのオーダーである。流体の深さに比べ、壁の厚さは小さいと考えられるから、 v のオーダーは、1m/s以上である。

これに対し、考えている現象の時間スケールは1ms程度であり、この時間で重力による加(減)速は、0.01m/s程度であり、2桁以上小さい。従って、壁の中の流体は、等速運動をすると考えて良い。

4.3節で示したように、クラウンの直径は、時間の1/4乗に比例し、 C_r を比例定数として、

$$r_{cr}(t) = C_r(t - t_0)^{1/4} \quad (4)$$

と表せる。 $t=0$ を、衝突した液滴の半分が沈んだ瞬間と定義すると、この瞬間のクラウンの半径は、液滴の半径に等しく2mmであると考えられる。このとき t_0 は、 $t=0$ で $r_{cr}=2\text{mm}$ にするための、時間の原点のずれを表す定数である。

(4)式に従えば、付け根に流入する流体の速度は $(t-t_0)$ の $-3/4$ 乗に比例する。(3)式で、壁の厚さ δ が時間によらず一定であるとすれば、付け根から上昇する流体の速度も $-3/4$ 乗に比例して、

$$v(t) = C_1(t - t_0)^{-3/4} \quad (5)$$

と表せる。ここで、 $C_1 = C_r d / 4 \delta$ である。

5. 考察

5.3 流体の鉛直方向の運動を仮定する

前節では、時刻 t に付け根から上端まで、壁の中を(5)式で表される速度を保ったまま、等速的に上昇するとした。ここでさらに次の仮定をする。

上昇した流体は、壁を等速的に上昇し、やがてクラウンの上端に達する。上端に達した流体は、そのまま上端に溜まり、リングを形成すると仮定する。時刻 t_1 に上昇を始めた流体が、時刻 t に高さ $h(t)$ に達するとする。(概念図を図12に示す。)上昇速度は(5)式で表わされると仮定しているので、 t_1 に関して次式が成り立つ。

$$v(t_1) \cdot (t - t_1) = h(t) \quad (6)$$

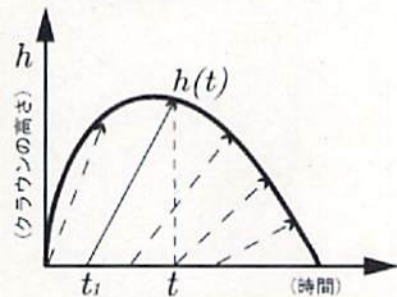


図12 時刻 t_1 に上昇を始めた流体が、時刻 t にリングに到達する。

壁を上昇する流体には、クラウンによって押し退けられた流体層と、流体層に衝突した液滴の2つが考えられる。衝突した液滴のうち、上端に達した体積を V とすると、リングの半径 r_{cr} に関して、次の関係が成り立つ。

$$2\pi r_{cr}(t) \cdot \pi r(t)^2 = \pi r_{cr}(t_1)^2 d + V \quad (7)$$

と表せる。ここでは液滴のうち、水面下に沈んだ部分と同じ体積が、押し退けられた流体と同じ速度で上昇すると考えることにより、 V を求めることにする。

(2)～(7)式を組み合わせれば、ある初期値に対して、クラウンの高さを計算する事ができる。

5. 考察



5.4 数値計算

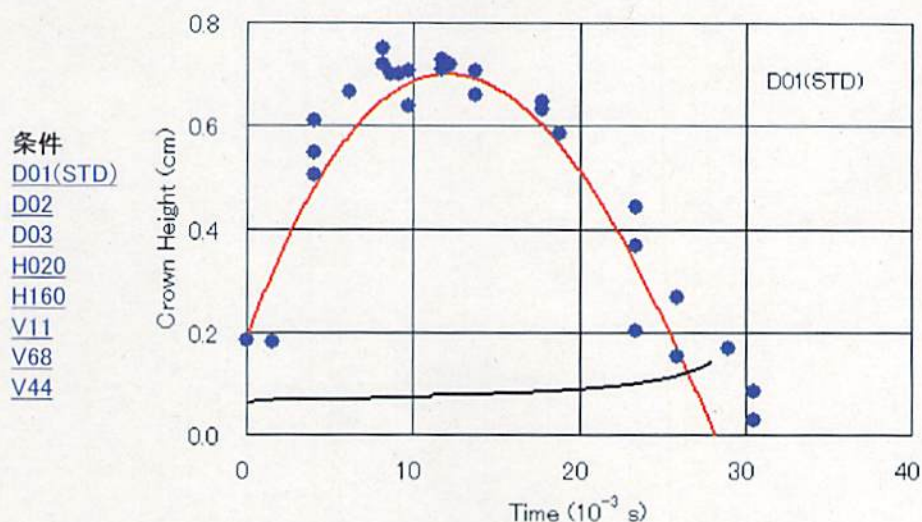


図13 クラウンの高さの計算値(赤線)と実験値(青印), およびリングの半径(黒線, 単位はmm)

高さが最大となる時刻に解析で求めた高さの最大値に近い初期値を与え, 5.1から5.3で示したモデルを用いて前方および後方に時間積分を行った. 表面張力 s および密度 ρ には作業流体の物性値を, Cr, t_0 の値は, 条件ごとに解析値に合う値を代入した.

標準実験に相当する s, ρ, d, Cr, t_0 のもと, $C_1=0.0030$ として計算を行った所, 図13に示す結果を得た. なお, 初期値は, 高さの最大値 7mm を $t=12\text{ms}$ で与えた. この計算結果は, 標準実験で得られたクラウンの高さのプロファイルをよく再現している.

この条件を与えた時のリングの半径は, $t=10\text{ms}$ のときに $r \sim 0.70\text{mm}$ である. D01C00では, 突起の付け根の太さが $r \sim 0.4\text{mm}$ であり, この計算で得られたリング直径は, 実験のデータに近いと考えられる. 他の条件の場合も, 条件に合う s, Cr, t_0, ρ のもとで適当な c_1 の値を与えることにより, うまく再現することができた. (具体的な値については別頁にまとめて示す.) このことから, 考えたモデルの妥当性は高いと考えてよいだろう.

補足: 計算結果が, 最も実験値に近くなったパラメータと初期値



6. まとめ

デジタルビデオを使用して、ミルククラウンを撮影し、クラウンの直径及び高さに注目して画像解析を行い、結果を検証した。

クラウンの直径は、液滴の衝突速度、流体の深さ、粘性によらず、経過時間の $1/4$ 乗に比例し、クラウン消滅後の痕跡の半径は時間の $1/2$ 乗に比例するという結果を得た。これまで主として考えられてきたような、経過時間の $1/2$ 乗に比例して広がる表面張力波と見なすことのできる領域は、クラウン消滅後の痕跡だけであった。

本研究で行った実験は、これまで行われてきた研究に比べ、衝突する液滴の粒径や流体の深さが異なっている。(具体的には、本実験はたとえば Yarin and Weiss (1995) と比べると、衝突速度は1桁以上小さく、衝突する液滴の半径はおよそ1桁以上大きい。)これまでの研究との相違は、このスケールの違いによる可能性がある。このことは、表面張力波としての近似に限界があることを示唆している。

ミルククラウンの上端のリングにかかる鉛直方向の加速度は、重力加速度の10数倍程度であり、表面張力は、この加速度を生じるのに十分である。従って、ミルククラウンでは、表面張力が支配的である事は明らかである。

実験では、鉛直方向の運動に注目すると、クラウンの上昇時に比べ、下降時で加速度が遅くなるという結果を得た。このことは、体積のバランスと、表面張力を復元力としたリングの運動を考えることで、十分説明することができる。下降時に加速度が小さくなるのは、クラウンの崩壊によりリングの質量が増加するためである。

現在、ミルククラウンの数値シミュレーションが、DNSやCIPなどのさまざまな方法で試みられている。これまでのシミュレーションでは、流体の表面の形状が実際に見られるミルククラウンと異なっているところが見られる。これらシミュレーションで、表面張力が実際よりも弱く、クラウンを形成してから消滅する時間スケールが長くなっているものが多い。例えば 張, 島田, 中川, 矢部 (2000) は、表面張力の含め方が弱いため、液滴が衝突してから突起が形成されるまでの時間が、本実験で得られた結果と比較して、およそ1桁程度遅い。実験で見られるようなミルククラウンを再現するためには、相応の表面張力を含めなければならないだろう。